Univerzita Karlova v Praze

Matematicko - fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKA PRÁCE

Marek Pavko

Vliv rizikové míry na optimalizaci portfolia

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Jiří Herman

Studijný program: Matematika

Studijní obor: Finanční matematika

Praha 2011

Na tomto mieste by som sa rád poďakoval vedúcemu mojej bakalárskej práce Mgr. Jiřímu Hermanovi za cenné rady, ochotu, poskytnuté dáta a čas strávený pri všetkých našich konzultáciách. Veľká vďaka patrí aj mojej rodine a kamarátom, ktorí ma počas celého môjho štúdia podporovali a dôverovali mi.

Prehlasujem, že som túto bakalársku prácu vypracoval samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov, literatúry a ďalších odborných zdrojov.

Beriem na vedomie, že sa na moju prácu vzťahujú práva a povinnosti vyplývajúce zo zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platnom znení, hlavne skutočnosť, že Univerzita Karlova v Prahe má právo na uzavretie licenčnej zmluvy o použití tejto práce ako školského diela podľa § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Prahe dňa 27.5.2011 Marek Pavko

Název práce: Vliv rizikové míry na optimalizaci portfólia
Autor: Marek Pavko
Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistky
Vedoucí bakalářské práce: Mgr.Jiří Herman, Česká pojištovna, a.s.

Abstrakt: V tejto práci budeme študovať vplyv voľby rizikovej miery na správanie sa portfólia pri ôsmich rôznych optimalizačných stratégiách. V časovom horizonte dvanástich rokov budeme skúmať výnosnosť a rizikovosť týchto stratégií. Tri stratégie sú založené na Markowitzovej teórii portfólia. Tri sú založené na maximalizácii výnosu. Ako benchmark sme použili rovnomerne rozložené portfólio. Posledným skúmaným portfóliom bolo portfólio zložené z jedného akciového indexu. Na základe rôznych mier rizika zhodnotíme výhodnosť jednotlivých stratégií. Medzi použité miery rizika patrili smerodatná odchýlka, Value at Risk a Conditional Value at Risk. Všetky optimalizačné úlohy boli riešené pomocou programu Mathematica na reálnych dátach.

Klíčová slova: portfolio, riziko, optimalizace, výnos

Title: The influence of risk measure on portfolio optimization
Author: Marek Pavko
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: Mgr. Jiří Herman, Česká pojištovna, a.s.

Abstract: This work is studying the influence of risk measure selection on performance of a portfolio in eight different optimization strategies. In time horizon of twelve years, we are examining profitability and riskiness of these strategies. Three of the above mentioned strategies are based on Markowitz portfolio theory. Another three of them are based on yield maximalization. As a benchmark we are using an equally distributed portfolio . The last strategy used is portfolio consisting of a stock index. On the basis of different risk measure we are trying evaluate profitability of individual strategies. In order to measure the risk, method of standart deviation, Value at Risk and Conditional Value at Risk have been used. All optimization problems have been solved using software Mathematica on real data.

Keywords: portfolio, risk, optimization, yield

Obsah

1 Úvod

Cieľom každého racionálne premýšľajúceho investora je dosiahnuť čo najväčší zisk zo svojej investície a pritom podstúpiť čo najmenšie riziko. Preto dnes patrí riadenie finančných rizík medzi jednu z najdôležitejších úloh dobrého investora. Rastúca neistota finančných trhov a nárast volatility tejto úlohe len pridáva na dôležitosti.

V tejto práci sa budeme snažiť zostaviť optimálne portfólio pri rôznych mierach rizika. Naše portfólio bude zložené z 8 akciových indexov vybraných krajín a štátneho dlhopisu. Budeme študovať a porovnávať jeho jednotlivé vlastnosti, ktorými sú výnos a riziko. Časový horizont, ktorý nás bude zaujímať je dlhý 12 rokov. Dĺžkou horizontu zachytávame celý ekonomický cyklus.

Teóriu portfólia vybudujeme na Markowitzovom prístupe, ktorému je venovaná kapitola číslo 3. Pre vybudovanie samotnej teórie portfólia sú dôležité aj niektoré základné znalosti štatistických pojmov, ktoré si ozrejmíme v kapitole s číslom 2.

Výber miery rizika môže podstatne ovplyvniť konštrukciu portfólia a jeho výnosnosť. Preto budeme pracovať s rôznymi mierami rizík. Medzi nami použité miery rizika patrí smerodatná odchýlka, Value at Risk a Conditional Value at Risk. Použité miery rizík su bližšie popísané v 4. kapitole.

Empirickej analýze dostupných dát je venovaná kapitola číslo 5. V kapitole číslo 6 budeme interpretovať naše výsledky, ktorých dopady si zhrnieme v závere.

V prílohách sa nachádzajú jednotlivé numerické výpočty ako aj zdrojový kód programu, ktorým sme počítali samotné rozloženie našeho portfólia.

2 Štatistika

2.1 Náhodná veličina, momenty, kvantily a korelácia

V tejto kapitole sa oboznámime s niektorými základnými pojmami zo štatistiky, ktoré budeme neskôr využívať v ďalšom texte. Definície sú prevzaté z [3], [4], [5].

2.1.1 Náhodná veličina

Definícia 1
σ-algebra je neprázdny systém podmnožín priestoru , ktorý splňuje :

- Ak platí $A \in \Lambda$, potom tiež $\Omega \setminus A \in \Lambda$
- Ak platí $A_1 \in \Lambda$, $A_2 \in \Lambda$,...., potom tiež $\cup A_i \in \Lambda$

Nech (Ω, Λ, P) je pravdepodobnostný priestor, kde Ω je priestor elementárnych javov, Λ je σ-algebra a P je pravdepodobnosť.

Definícia 2
$\boldsymbol{X}$ je náhodná veličina práve vtedy keď, $\boldsymbol{X}$ je merateľné zobrazenie z $(\Omega, \Lambda) \to (\chi, B)$, kde B je σ- algebra podmnožín χ a χ je výberový priestor .

Inými slovami vzor merateľnej množiny je merateľný. Reálna náhodná veličina $\boldsymbol{X}$ je funkcia definovaná na priestore Ω, ktorej hodnoty sú reálne čísla.

2.2 Momenty, kvantily a korelácia

Definícia 3
Strednou hodnotou náhodnej veličiny $\boldsymbol{X}$ rozumieme číslo:

$$EX = \int_{\Omega} X(\omega)\, dP(\omega) \tag{1}$$

pokiaľ integrál na pravej strane existuje.

Pre samotný výpočet sa v praxi ale používa vzorec

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) \tag{2}$$

Definícia 4
Nech $\boldsymbol{X}$ je náhodná veličina. Všeobecný moment k-teho stupňa je

$$\mu_k^{'} = EX^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF(x)\,, \quad k = 0,\, 1,\, 2, ... \tag{3}$$

a centrálny moment k-teho stupňa je

$$\mu_k = E(X - EX)^k = \int_{-\infty}^{\infty} (X - EX)^k dF\,(x)\,, \quad k = 0\,,1\,,2, ... \tag{4}$$

pokiaľ integrály na pravej strane existujú.

Definícia 5

Rozptyl náhodnej veličiny $\boldsymbol{X}$ je

$$\mu_2 = E(X - EX)^2 \equiv var\, X. \tag{5}$$

Smerodatná odchýlka $\boldsymbol{X}$ je definovaná ako odmocnina z rozptylu

$$\sigma_x = \sqrt{var\, X}. \tag{6}$$

Šikmosť náhodnej veličiny $\boldsymbol{X}$ je definovaná vzťahom

$$\gamma_3 = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3}. \tag{7}$$

Špičatosť náhodnej veličiny $\boldsymbol{X}$ je definovaná vzťahom

$$\gamma_4 = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} \tag{8}$$

Definícia 6

Distribučná funkcia $\boldsymbol{F}$ náhodnej veličiny $\boldsymbol{X}$ je definovaná vzorcom

$$F\,(x) = P\,(X < x)\,, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Inverznú funkciu k distribučnej funkcii nazývame kvantilovou funkciou a je definovaná nasledujúcim vzťahom

$$F^{-1}\,(u) = inf\,\{\,x :\, F\,(x) \geq u\}\,, \quad 0 < u < 1. \tag{10}$$

Existencia inverznej funkcie je podmienená spojitou a rastúcou distribučnou funkciou. Hodnoty kvantilovej funkcie sa nazývajú kvantily.

K odhadom vyššie spomenutých momentov sa pri práci s reálnymi dátami používajú výberové štatistiky, ktoré sú založené na pozorovaniach realizácie $x_1, x_2, ...x_N$ náhodnej veličiny **X**. Predpokladáme, že pozorovania sú nezávislé a rovnako rozdelené. Medzi často používané výberové štatistiky patria výberový priemer - $\overline{X}$, výberový rozptyl - S^2 a výberová smerodatná odchýlka - $\hat{\sigma}$. Jednotlivé odhady sú definované nasledujúcimi vzorcami

$$\overline{X} = \tfrac{1}{N} \textstyle\sum_{i=1}^{N} X_i\,, \qquad S^2 = \tfrac{1}{N-1} \textstyle\sum_{i=1}^{N} \left(X_i - \overline{X}\right)^2\,, \qquad \hat{\sigma} = \sqrt{S^2}\,, \text{ pre } N > 1.$$

V prípade, že máme viac náhodých veličín X_1, X_2, $...X_N$, ktorých vlastnosti nás zaujímajú, používame pre nich viacrozmerné momenty.

Kovariancia náhodných veličín X_i a X_j je definovaná

$$\sigma_{ij} = cov\,(X_i,\, X_j) = E\left[(X_i - EX_i)\cdot(X_j - EX_j)\right]. \tag{11}$$

Kovariancia popisuje závislosť medzi náhodnými veličinami.

Korelácia alebo korelačný koeficient náhodných veličín X_i a X_j je definovaný vzorcom

$$\rho_{ij} = corr(X_i,\, X_j) = \frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{varX_i \cdot varX_j}} \tag{12}$$

za predpokladu, že $varX_i$, $varX_j > 0$.

Korelácia je normovaná kovariancia. Môže nadobúdať hodnoty medzi -1 a 1. Korelácia blízko 0 indikuje, že náhodné veličiny nie sú medzi sebou závislé. Naopak korelácia blízko 1 znamená, že náhodné veličiny majú medzi sebou určitý vzťah. Korelácia blízko 1 hovorí, že ak rastie jedna náhodná veličina, tak potom podobným spôsobom rastie aj druhá náhodná veličina. Korelácia blízko -1 zase hovorí, že ak rastie jedna náhodná veličina, tak druhá podobným spôsobom klesá.

Kovariančná matica náhodných veličín X_1, X_2, $...X_N$ má tvar

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & . & . & . & \sigma_{1N} \\ . & . & & & . \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ \sigma_{N1} & . & . & . & \sigma_{NN} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Korelačná matica náhodných veličín X_1, X_2, $...X_N$ má tvar

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & \rho_{1N} \\ . & 1 & & & . \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ \rho_{N1} & . & . & . & 1 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Definícia 7

Reálna symetrická matica $\boldsymbol{A}$ je pozitívne definitná, ak pre každý vektor $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ platí $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{x} > 0$.

Ako u jednorozmerných náhodných veličín používame výberové štatistiky, tak poznáme aj výberové štatistiky viacrozmerných náhodných veličín. Tieto výberové štatistiky sú založené na pozorovaniach $x_{i1}, x_{i2}, ...x_{iN}$ a $x_{j1}, x_{j2}, ...x_{jN}$ náhodných veličín X_ia X_j. Výberový odhad kovariancie

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{N-1} \sum_{t=1}^{N} \left(x_{it} - \overline{X_i} \right) \cdot \left(x_{jt} - \overline{X_j} \right). \tag{15}$$

Výberový korelačný koeficient

$$\hat{\rho}_{ij} = \frac{cov\left(X_{it},\, X_{jt} \right)}{\sqrt{VarX_{it} \cdot VarX_{jt}}} \tag{16}$$

za predpokladu, že rozptyly sú nenulové.

3 Markowitzova teória portfolia

Markowitzova teória portfólia vznikla v roku 1952. Jej autorom je Harry Markowitz, ktorý vtedy publikoval článok v časopise The Journal of Finance. Markowitz vo svojej práci upozornil na to, že v úlohe optimalizácie portfólia hrá doležitú rolu aj riziko zmeny výnosov portfólia. Do tejto doby sa za optimálne portfólio považovalo portfólio maximalizujúce zisk bez ohľadu na riziko zmeny výnosov. Vychádzal z predpokladov, že investor pozná očakávaný výnos portfólia a riziko zmeny výnosov portfólia. Tieto informácie mali slúžiť pre jeho lepšie rozhodovanie sa pri optimálnom výbere portfolia. Jeho pohľad na investičnú stratégiu vniesol do investovania väčší dôraz na diverzifikáciu portfólí. Samotná diverzifikácia má slúžiť k znižovaniu rizika, ktoré investor pri obchodovaní podstupuje.

3.1 Markowitzov model

Základným predpokladom Markowitzovho modelu je eficientný, tj. účinný, trh. Trh sa nazýva eficientný ak spĺňa nasledujúce predpoklady. Voľne prevzaté z [1].

- Investor sa rozhoduje iba na základe informácií o očakávaných výnosoch a kovariančnej štruktúre výnosov
- Investor sa pri rovnakom riziku rozhoduje pre portfólio s vyšším výnosom
- Investor sa pri rovnakom očakávanom výnose rozhodne pre portfólio s menším rizikom
- Aktíva sú nekonečne deliteľné
- Investičný horizont je jedno obdobie (statické)
- Neuvažujú sa žiadne transakčné náklady či dane
- Pre všetkých dlžníkov a veriteľov existuje len jedna bezriziková úroková miera
- Všetky aktíva sú obchodovateľné
- Predaje nakrátko (short sell) sú povolené. V niektorých modeloch môžu byť tieto predaje zakázané. Predaj nakrátko znamená predaj aktiva, ktoré nevlastním a tým si vlastne požičiavam prostriedky, ktoré investujem do iných aktiv. V našej práci predaje nakrátko nepovoľujeme
- Žiadny z investorov nemôže podstatne ovplyvniť výnosy
- Všetci investori majú rovnaký prístup ku všetkým informáciam

Investor sa snaží o výber portfólia, ktoré maximalizuje jeho očakávaný výnos a minimalizuje riziko.

3.2 Konštrukcia optimálneho portfólia

Portfóliom nazývame určitú skupinu aktív. Nech máme N aktív. Potom vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2..., x_N)^T$ predstavuje naše portfólio a zložky vektora $\boldsymbol{x}$ predstavujú množstvo investovaných prostriedkov do n-tého aktíva. Predpokladajme, že naše maximálne množstvo investovaných prostriedkov v celom portfóliu je 1. Potom musí platiť $\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$. Zapísané vo vektorovom tvare $\mathbf{1}^T\mathbf{x} = 1$. Všeobecne však maximálne množstvo prostriedkov môže odpovedať akémukoľvek množstvu, ktoré investor investuje do svojho portfólia.

Našu náhodnú veličinu v tomto prípade budú predstavovať výnosy jednotlivých aktív. Výnosy označme ako $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \rho_2..., \rho_N)$. Výnos portfólia, ktoré je reprezentované množstvom $\mathbf{x} = (x_1, x_2..., x_N)^T$, sa potom vypočíta $\rho_P = \boldsymbol{\rho}^T\boldsymbol{x}$. Očakávaný výnos jednotlivých aktív v portfóliu je stredná hodnota výnosov $\boldsymbol{r} = E\boldsymbol{\rho} = (r_1, r_2..., r_N)^T$. Z toho jednoducho dostávame vzorec na výpočet očakávaného výnosu portfólia $r_P = E\rho_P = \boldsymbol{x}^T E\boldsymbol{\rho}$. Pre rozptyl výnosu portfólia platí $\sigma_P^2 = var\, \boldsymbol{\rho}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{V}\,\boldsymbol{x}$. $\boldsymbol{V} = (\sigma_{ij})$ predstavuje kovariančnú maticu výnosov, kde $\sigma_{ij} = cov\,(\rho_i,\, \rho_j) \quad i,\, j = 1,.., N$. Riziko portfolia je definované vzťahom $\sigma_P = \sqrt{\sigma_P^2}$.

Pre nedostatok informácií o rozdelení náhodnej veličiny popisujúcej výnosy aktiv sa v praxi používajú výberové štatistiky, ktoré sme definovali v druhej kapitole. Pomocou historických dát možeme potom odhadnúť kovarianciu medzi výnosami aktív, korelačný koeficient, priemerný výnos a výšku rizika. Riziko si bližšie popíšeme v nasledujúcej kapitole 4.

Na základe poznatkov o očakávanom výnose portfólia a kovariančnej štruktúre výnosov sa dostávame k optimalizačnej úlohe

$$min\, \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{V}\,\boldsymbol{x} \tag{17}$$

za podmienok $\mathbf{1}^T\mathbf{x} = 1$ a $\boldsymbol{r}^T\boldsymbol{x} = \mu$, kde μ je pred tým požadovaný očakávaný výnos portfólia. Investor sa teda snaží dosiahnuť výnos, pre ktorý platí $r_i \geq \mu$ kde $i = 1, 2, ..., N$ za predpokladu minimalizácie rizika. Toto portfólio budeme v ďalšom texte označovať ako MVP z anglického minimum-variance portfolio.

Táto optimalizačná úloha sa dá interpretovať aj iným spôsobom, ktorý je založený na maximalizácii Sharpe-ovho pomeru. Sharpe-ov pomer je pomer očakávaného výnosu portfolia a rizika portfólia to je $\frac{r_P}{\sigma_P}$. To znamená, že čím menšie bude riziko portfolia tým bude hodnota pomeru väčšia. Optimalizačná úloha má teda tvar

$$max \frac{\boldsymbol{r}^T \boldsymbol{x}}{\sqrt{\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{V}\, \boldsymbol{x}}} \tag{18}$$

za podmienky $\mathbf{1}^T\mathbf{x} = 1$.

V oboch prípadoch ešte predpokladáme, že matica $\boldsymbol{V}$ je pozitívne definitná alebo aspoň pozitivne semidefinitná. Predaje na krátko môžu byť zakázané ale aj povolené. Záleží na zvolenej stratégii investora. Ako už bolo spomenuté v podkapitole 3.1 v našej práci predaje nakrátko nepovoľujeme.

3.3 Všeobecné riešenie minimalizačnej úlohy

Zaujíma nás všeobecné riešenie minimalizácie funkcie

$$min\, \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{V}\, \boldsymbol{x}$$

za podmienok $\mathbf{1}^T\mathbf{x} = 1$ a $\boldsymbol{r}^T\boldsymbol{x} = \mu$, kde μ je vopred požadovaný výnos. Budeme postupovať podľa [1]. Všeobecné riešenie potom dostávame nasledujúcim spôsobom. Budeme predpokladať, že $\boldsymbol{V}$ je pozitívne definitná a vylúčime prípad keď $\boldsymbol{r} = k\mathbf{1}$ pre nejaké konštantné k. V tomto prípade je riešenie jednoduché. Vyberieme len jedno aktívum, ktoré má najmenšie riziko. K dosiahnutiu požadovaného výsledku použijeme metódu Lagrangových multiplikátorov. Lagrangova funkcia má v našom prípade tvar

$$L\left(\boldsymbol{x},\, \lambda_1,\, \lambda_2\right) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{V}\, \boldsymbol{x} + \lambda_1 \left(1 - \mathbf{1}^T\mathbf{x}\right) + \lambda_2 \left(\mu - \boldsymbol{r}^T\boldsymbol{x}\right).$$

Keďže hľadáme minimum funkcie použijeme jej deriváciu, ktorú položíme rovno nule. Potom dostávame rovnicu

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} L = \boldsymbol{V}\, \boldsymbol{x} - \lambda_1 \mathbf{1} - \lambda_2 \boldsymbol{r} = \mathbf{0},$$

ktorej riešenie je

$$\boldsymbol{x}^* = \lambda_1 \boldsymbol{V}^{-1}\mathbf{1} + \lambda_2 \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{r}.$$

Položme teraz $A = \mathbf{1}^T\boldsymbol{V}^{-1}\mathbf{1}$, $B = \mathbf{1}^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{r}$, $C = \boldsymbol{r}^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{r}$ a nakoniec $\Delta = AC - B^2$. Platí $A > 0$, $C > 0$, a $\Delta > 0$ plynie z Schwarzovej nerovnosti[1] ak predpokladáme, že $\mathbf{1}$ a $\boldsymbol{r}$ sú lineárne nezávislé. Konštanty λ_1 a λ_2 môžeme odvodiť

[1] $\mid \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \mid^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \mid x_i \mid^2 \sum_{j=1}^{n} \mid y_j \mid^2$

z počiatočných podmienok

$$\mathbf{1}^T\mathbf{x} = 1 = \lambda_1 A + \lambda_2 B$$

$$\boldsymbol{r}^T\boldsymbol{x} = \mu = \lambda_1 B + \lambda_2 C$$

Riešením sústavy dostávame $\lambda_1 = \frac{C-\mu B}{\Delta}$ a $\lambda_2 = \frac{\mu A - B}{\Delta}$.

Teraz si rozoberieme dva prípady, ktoré závisia na tom aká je hodnota B. V prvom prípade budeme predpokladať, že platí $B = \mathbf{1}^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{r} = 0$. To v praxi nie je veľmi reálny prípad ale teoreticky táto situácia môže nastať. Potom dostávame

$$\lambda_1 = \frac{1}{\mathbf{1}^T\boldsymbol{V}^{-1}\mathbf{1}} \quad \text{a} \quad \lambda_2 = \frac{\mu}{\boldsymbol{r}^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{r}}$$

a pre MVP platí

$$\boldsymbol{x}^* = \frac{\boldsymbol{V}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^T\boldsymbol{V}^{-1}\mathbf{1}} + \frac{\mu\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{r}^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{r}}.$$

V druhom prípade si ukážeme riešenie pre MVP ak $B = \mathbf{1}^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{r} \neq 0$. Zadefinujeme si pomocné premenné $x_1 = \frac{\boldsymbol{V}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^T\boldsymbol{V}^{-1}\mathbf{1}}$ a $x_2 = \frac{\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{r}}{\mathbf{1}^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{r}}$. Potom pre MVP platí nasledujúci vzťah

$$\boldsymbol{x}^* = \frac{A(C-\mu B)}{\Delta}x_1 + \frac{B(\mu A - B)}{\Delta}x_2.$$

Nakoniec poznamenajme, že x_1 a x_2 sú závislé na požadovanom výnose μ ale váhy portfólia na ňom nezávisia.

4 Riziko

Finančné operácie na trhoch sú ovplyvňované rôznymi náhodnými udalosťami. To spôsobuje, že sa do finančných operácii vnáša riziko. Všeobecne môžeme riziko definovať ako merateľnú možnosť, že budúcnosť môže byť iná ako predpokladáme. Samotné riziko môže byť chápané rôznymi spôsobmi. Niekto ho môže chápať len ako hrozbu, zatiaľ čo iný v ňom môže vidieť nielen hrozbu ale aj príležitosť využiť situáciu, ktorá nastane.

4.1 Delenie rizík

Riziko môžeme rozdeliť do troch dôležitých kategórií a to na finančné, obchodné a strategické riziko. Obchodné riziko je riziko, ktoré je špecifické pre trh, na ktorom firma pôsobí. Patrí tam napríklad riziko konkurencie a riziko reputácie. Strategické riziko je riziko, ktoré závisí na zmenách v ekonomickom a politickom prostredí. Týmito dvoma rizikami sa však ďalej zaoberať nebudeme. Bližsie si špecifikujeme len finančné riziko, ktoré je pre nás najzaujímavejšie.

Rozdelenie finančných rizík je voľne prevzaté z [4]. Finančné riziká môžeme rozdeliť do nasledujúcich skupín

- kreditné riziko - je riziko straty kedy zmluvná strana nedokáže pokryť svoje záväzky v stanovenej časovej lehote a v plnej výške
- tržné riziko - je riziko straty, ktoré vyplýva zo zmien cien aktív a pasív alebo zmien tržných mier
  - menové - vyplýva z citlivosti aktív a pasív na menové kurzy
  - úrokové - vyplýva z citlivosti aktív a pasív na úrokové sadzby
  - komoditné - vyplýva z citlivosti aktív a pasív na zmeny cien komodít
  - akciové - vyplýva z citlivosti aktív a pasív na zmeny cien akcií
- operačné riziko - je riziko straty, ktoré vzniká dôsledkom ľudského zlyhania, nevhodnými alebo chybnými vnútornými predpisami alebo zlyhaním systému
- likvidné riziko - je riziko straty, ktorého dôsledkom je nedostatku peňažných prostriedkov
- právne riziko - je riziko straty, ktorého dôsledkom je právne nepresadenie alebo porušenie požiadavkov protistrany

V tejto práci sa budeme zaoberať iba tržným rizikom, ktorého súčasťou je riziko akciové. Pre samotné vyčíslenie alebo zmeranie veľkosti rizika portfólia sme použili tri rôzne miery rizika - smerodantú odýchlku, Value at Risk a Conditional Value at Risk. S jednotlivými mierami sa bližšie zoznámime v nasledujúcich podkapitolách.

4.2 Smerodatná odchýlka ako miera rizika

Smerodatná odchýlka (volatilita) je jednou z najjednoduchších mier, ktorou môžeme merať riziko. Riziko v našom prípade predstavuje zmena očakávaného výnosu portfólia. Smerodatná odchýlka vyjadruje rozptyl okolo strednej hodnoty. To znamená že, volatilita nám udáva akýsi odhad toho ako môžu byť skutočné miery výnosov vzdialené od ich očakávanej hodnoty.

Pre výpočet volatility z reálnych dát sa používa výberová smerodatná odchýlka

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}, \quad N > 1.$$

Pri výpočte volatility portfólia sa musí ešte zohľadniť vzájomný vzťah medzi výnosami jeho jednotlivých zložiek. Pre volatilitu portfólia potom platí vzťah

$$\sigma_P = \sqrt{\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{V}\, \boldsymbol{x}}$$

kde $\mathbf{x}$ je vektor investovaného množstva v portfóliu a $\boldsymbol{V}$ je kovariančná matica výnosov.

Zistiť budúce chovanie volatility výnosov je často kľúčová informácia pre investora. Na základe svojej predpovede volatility môže včas reagovať a prispôsobiť svoje portfólio, tak aby minimalizoval svoje riziko. Pre predikcie volatility sa používajú rôzne metódy, medzi ktoré napríklad patria:

- metóda kĺzavých priemerov
- modely GARCH a ARCH
- metóda exponenciálneho vyrovnávania

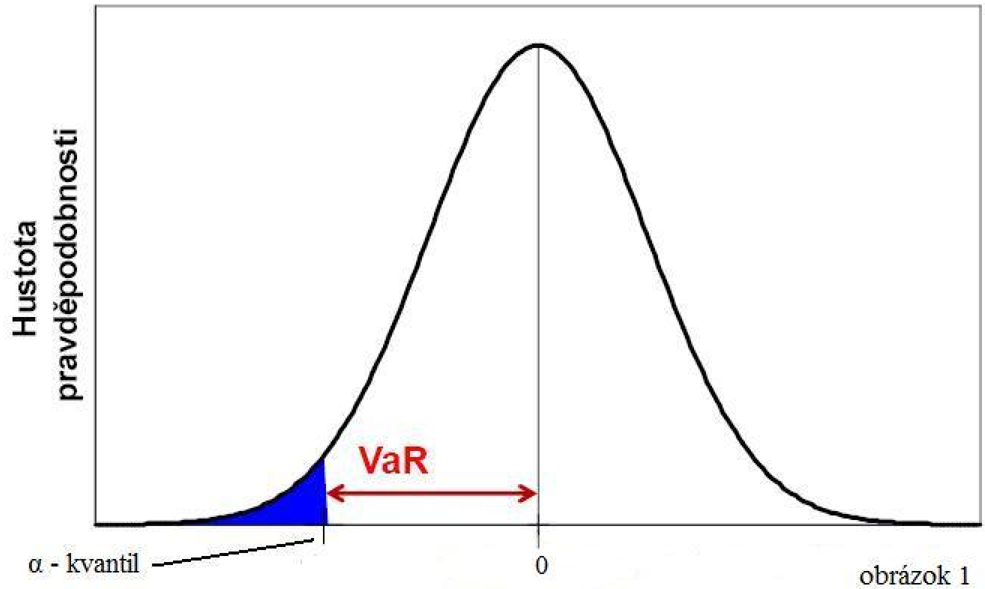
4.3 VaR - Value at Risk

Value at Risk je miera rizika, ktorá vyjadruje maximálnu možnú stratu, ktorú môžeme realizovať na našom portfóliu za určité obdobie na danej hladine spoľahlivosti. Na danej hladine nebude nikdy maximálna strata väčšia ako Value at Risk. Matematicky to môžeme podľa [7] definovať nasledujúcim spôsobom.

Definícia 8
Nech L je náhodná veličina vyjadrujúca stratu portfólia a $\alpha \in (0,1)$. Potom definujeme VaR_α predpisom

$$VaR_\alpha = inf\left\{l \in \mathbb{R} : \, P\left(L > l\right) \leqq 1 - \alpha\right\}. \tag{19}$$

Štandartne sa VaR počíta na obdobie dĺžky jedného dňa a na hladine spoľahlivosti 95%, 97,5% alebo 99%. Na obrázku 1 je znázornená VaR graficky.



obrázok 1

VaR nevieme spočítať presne, pretože rozdelenia náhodných veličín v praxi nie sú známe. Hodnoty VaR môžeme v skutočnosti len odhadnúť. Pri samotných odhadoch je veľmi dôležité ako určiť α kvantil. Medzi metódy výpočtu VaR , ktoré sú v praxi najčastejšie používané patria nasledujúce metódy

- metóda variancie -kovariancie
- metóda Monte - Carlo
- metóda historickej simulácie

VaR nespĺňa axiom S (viď nasledujúca podkapitola), ktorý určuje, že miera rizika dvoch náhodných veličín je vždy menšia alebo rovná ako súčet mier rizík každej náhodnej veličiny zvlášť. Táto vlastnosť je nutná z pohľadu diverzifikácie portfólia. Preto VaR nie je koherentnou mierou rizika.

V praxi patrí VaR medzi jeden z najpoužívanejších nástrojov na odhadovanie expozície rizika. Jej výhody môžeme zhrnúť v nasledujúcich bodoch

- VaR poskytuje informáciu o výške rizika pomocou jedného čísla, takže ju môžeme ľahko interpretovať
- Miera VaR je použiteľná pre všetky typy inštrumentov

- Jednotka VaR je rovnaká ako jednotka týchto inštrumentov

Tak ako má svoje výhody má aj nevýhody medzi ktoré patria

- VaR je často odhadovaná na základe historických dát a preto nezahŕňa budúce extrémne straty
- VaR môže byť zaťažená veľkou štatistickou chybou
- VaR udáva iba hodnotu, ktorú strata s danou pravdepodobnosťou nepresiahne. Nevypovedá nič o strate ak bude táto hodnota prekročená

Spomenuté nevýhody môžeme odstrániť doplnením VaR o výsledky stresových testov alebo použitím inej miery rizika.

4.4 CVaR - Conditional Value at Risk

Ako sme v minulej podkapitole uviedli medzi jednu z veľkých nevýhod VaR patrí, že udáva iba hodnotu, ktorú strata s danou pravedepodonosťou neprekročí. Nás však často zaujíma aj situácia keď je táto hodnota prekročená. CVaR patrí medzi miery, ktoré túto skutočnosť zohľadňujú. CVaR je niekedy nazývaná aj ako očakávaná extrémna strata (expected shorfall). CVaR je koherentnou mierou rizika. Vlastnosti koherentnej miery boli publikované v [6] , kde boli formulované ako súbor matematických axiómov. Označme ρ ako rizikovú mieru. Potom podľa [6] máme:

Axióm T : *Translačná invariancia* - Nech X je náhodná veličina. Potom pre každé X a pre každé $\alpha \in \mathbb{R}$ platí $\rho(X+\alpha) = \rho(X) - \alpha$ tj., pokiaľ do portfólia pridám zaručený zisk znížim stratu

Axióm S : *Subaditivita* - Nech X a Y sú náhodné veličiny. Potom pre každé X a každé Y platí $\rho(X+Y) \leqq \rho(X) + \rho(Y)$

Axióm PH : *Pozitívna homegenita* - Pre každé $\lambda \geqq 0$ a nejakú náhodnú veličinu X platí $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$

Axióm M : *Monotónia* - Nech X a Y sú náhodné veličiny. Potom pre každé X a Y, ktoré spĺňajú $X \leqq Y$ platí $\rho(X) \leqq \rho(Y)$

Axióm R : *Nezápornosť* - Nech X je náhodná veličina. Potom pre každé X, ktoré spĺňa $X < 0$ platí $\rho(X) > 0$

Inými slovami môžeme axiómy interpretovať nasledujúcim spôsobom. Čím rizikovejšie je portfólio, tým väčsia by mala byť aj miera rizika tohoto portfólia.

Pridaním bezrizikového aktíva do portfólia by sa absolútna riziková miera meniť nemala. Pri zväčšení investície do niektorého z aktív by sa jeho riziková miera mala úmerne zväčsiť.

Definícia 9
Miera rizika, ktorá spĺňa axiómy T, S, PH a M sa nazýva koherntnou mierou.

Definícia 10
Nech L je náhodná veličina vyjadrujúca stratu portfólia a $\alpha \in (0, 1)$. Potom definujeme $CVaR_\alpha$ predpisom

$$CVaR_\alpha(L) = E[L \mid L > VaR_\alpha(L)] \tag{20}$$

$CVaR_\alpha(L)$ teda odpovedá priemeru všetkých strát L, ktoré prevyšujú veľkosť $VaR_\alpha(L)$ na hladine spoľahlivosti α. V praxi však zatiaľ $CVaR_\alpha$ nie je tak uchytenou mieru rizika akou je to v prípade miery VaR.

5 Empirická analýza dát

5.1 Algoritmus výpočtu

V tejto práci sme použili dáta 8 medzinárodných akciových indexov, ktoré reprezentujú takmer celý svet. Medzi použité indexy patrili: Austrália, Brasília, Česká republika, Nemecko, Čína, Japonsko, Rusko a USA a štátny dlhopis, ktorý indikoval bezrizikovú zložku portfólia. K analýze boli použité indexy MSCI Free. Sú to indexy obsahujúce denné hodnoty cien indexov vyspelých tržných ekonomík ale aj ceny niektorých rozvojových tržných ekonomík. Hodnoty jednotlivých indexov sú v rovnakej mene, ktorou je americký dolár. Všetky optimalizačné výpočty boli realizované v programe Mathematica.

Časové obdobie 12tich ročných period začína v roku 1998 a končí v roku 2009. Ročná perióda predstavovala 250 obchodovateľných dní. Pre výpočet jednotlivých štatistických ukazovateľov sme použili medzidenné výnosy spomenutých indexov a dlhopisu. Výnosy boli počítané podľa nasledujúceho vzťahu

$$r_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

kde r_t je percentuálny výnos v čase t a P_t predstavuje veľkosť hodnoty daného indexu v čase t, podobne P_{t-1}.

Samotné odhady pre rozloženie portfólia boli realizované nasledujúcim spôsobom. Prvý rok obchodovateľných dní bol použitý pre odhad rozloženia portfólia v nasledujúcom roku. To znamená, že z časovej rady medzidenných výnosoch použitých indexov prvého roka sme si spočítali kovariančnú a korelačnú maticu medzi týmito indexami. Takisto sme spočítali pre prvý rok miery rizika tj., smerodatnú odchýlku, Value at Risk a Conditional Value at Risk použitých indexov. VaR a CVaR boli počítané na hladine poľahlivosti 95%. Na základe optimalizácie sme potom dostali optimálne rozloženie portfólia, ktoré sme zainvestovali počas druhého roka. Pre odhad rozloženia portfólia v treťom roku sme využili historickú radu medzidenných výnosov prvých dvoch rokov, na ktorej sme si spočítali kovariančné a korelačné matice a vyššie zmienené hodnoty rizík. Výsledok optimalizácie rozloženia portfólia sme aplikovali na tretí rok. Podobným postupom sme pokračovali pri ďalšom odhadovaní rozloženia portfólia v ďalších rokoch. To znamená, že odhad rozloženia portfólia pre šiesty rok bol počítaný na základe historických pozorovaní dĺžky prvých piatich rokov.

Benchmarkom pre porovnávanie použitých optimalizácií bolo pre nás portfólio s rovnomerným rozložením množstva investovaného do jednotlivých aktív (V ďalšom texte budeme používať názov benchmark). Množstvo investovných prostriedkov jedného indexu u čisto akciového portfólia predstavovalo približne 13%.

Pokiaľ uvažujeme zmiešané portfólio, potom množstvo investovaných prostriedkov do jedného indexu tvorilo približne 11%.

5.2 Použité spôsoby optimalizácie

Pre spôsob výpočtu rozloženia portfólia v jednotlivých periódach sme použili 8 rôznych optimalizácií. Ani v jednom prípade nie sú povolené takzvané predaje na krátko. To znamená, že množstvo investovaných prostriedkov je väčšie alebo rovné nule. Ako už bolo v predchádzajúcej podkapitole uvedené benchmark patril k jednej z použitých otimalizácií.

Druhou použitou optimalizáciou bolo asi najjednoduchšie možné rozloženia portfólia a to investovať celé množstvo prostriedkov do jedného indexu. V našom prípade sme investovali do indexu Spojených štátov. Toto portfólio budeme označovať index USA.

Ďalším spôspobom optimalizácie bola snaha o maximalizáciu zisku portfólia za podmienok, že riziko tohto portfólia bude menšie alebo rovné ako riziko benchmarku a výnos celého portfólia je väčší ako výnos benchmarku. Keďže sme používali tri rôzne miery rizika dostávame ďalšie tri rôzne optimalizácie, ktoré budem značiť nasledujúcim spôsobom Max SD, Max VaR a Max CVaR. Podľa toho aká miera rizika bola zvolená.

Posledné tri optimalizácie sú založené na Markowitzovom prístupe pre optimalizovanie portfólia. Tento prístup je založený na minimalizácii rizika za určitých podmienok. Využitím vzťahu medzi kovariančnou a korelačnou maticou sme dostali minimalizačnú funkciu

$$min \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_i x_j \rho_{i\,j} y_i y_j \tag{21}$$

kde x_i predstavuje množstvo investovaných prostriedkov do i teho indexu, $\rho_{i\,j}$ je korelácia medzi výnosami i teho a j teho indexu a y_i predstavuje mieru rizika výnosov i teho indexu, ktorú sme použili pri výpočtoch rozložení portfólií. Pri minimalizácii funkcie sme v prvom prípade zloženia portfólia (akciové portfólio, podkapitola 6.1) ešte požadovali aby požadovaný výnos portfólia bol väčší ako výnos benchmarku. V druhom prípade zloženia portfólia (zmiešané portfólio, podkapitola 6.2) sme túto podmienku nahradili podmienkou, že požadovaný výnos portólia mal byť minimálne 120% výnosu štátneho dlhopisu, ktorý portfólio obsahuje. Táto podmienka výnosu zaručuje, že portfólio nebude tvoriť len štátny dlhopis ale aj zložka akcií.

Použitím smerodatnej odchýlky sme získali jednu optimalizáciu. Ďalšie dve sme získali výmenou smerodatnej odchýlky za inú použitú mieru rizika tj. VaR a

CVaR. V ďalšom texte budeme teda značiť tieto optimalizácie nasledovne mvp SD, mvp VaR a mvp CVaR vždy vzhľadom na zvolenú mieru rizika.

Vo všetkých optimalizáciách prepokladáme 100% menové zaistenie a držanie dlhopisu až do splatnosti. Dlhopis je taktiež považovaný za risk-free. Z týchto dôvodov nás v tejto práci zaujíma iba akciové riziko. Menové, úrokové a kreditné riziko v práci neuvažujeme.

6 Interpretácia výsledkov

V tejto časti kapitoly sa zameriame na popis výsledkov, ktoré sme našimi výpočtami obdržali. Popíšeme správanie portfólia pri vyššie spomenutých dvoch spôsoboch jeho zloženia.

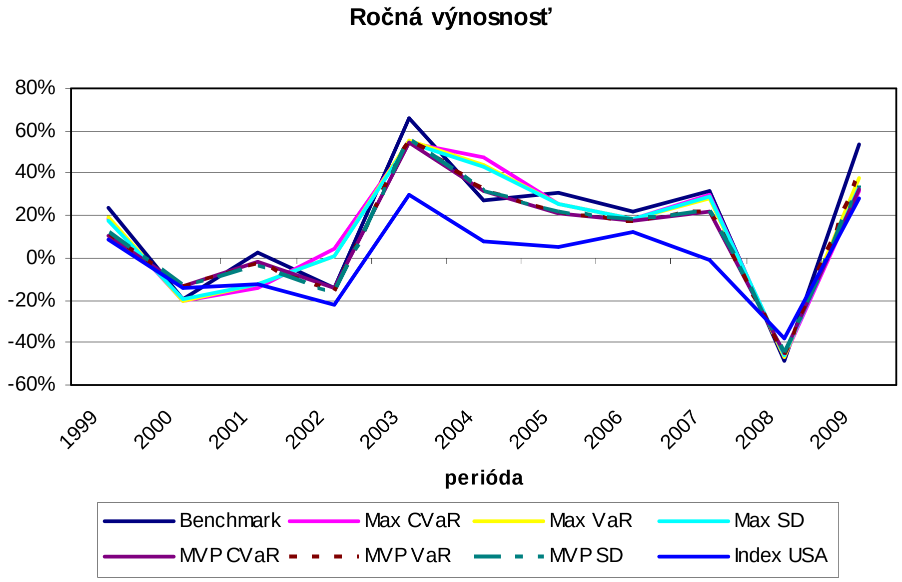
6.1 Akciové portfólio

Prvým z použitých zložení portfólia bolo portfólio zložené len z akciových indexov. Použili sme 8 indexov spomenutých v kapitole 5.1. V tabuľke 1 si môžeme porovnať jednotlivé ročné výnosy našich testovaných portfólii. Vidíme, že do roku 2002 neboli trhy veľmi stabilné, čo dokazuje striedanie výnosu a straty. Od roku 2002 do roku 2008 vykazuje trh neustály nárast cien akcií a s ním spojenú výnosnosť. V roku 2008, v čase finančnej krízy, je prepad cien akcií značne veľký. V nasledujúcom roku po kríze je však opäť badateľné veľké oživenie trhu a s ním spojený vysoký výnos.

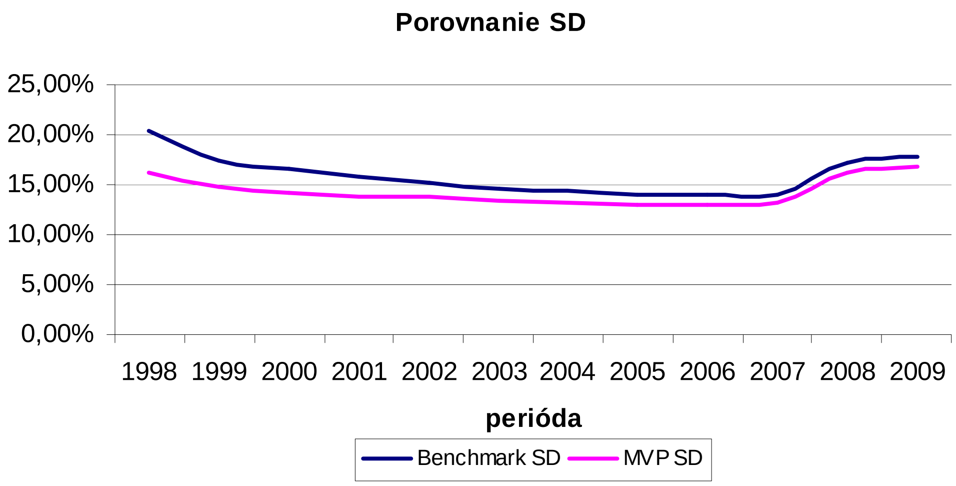
Tabuľka 1

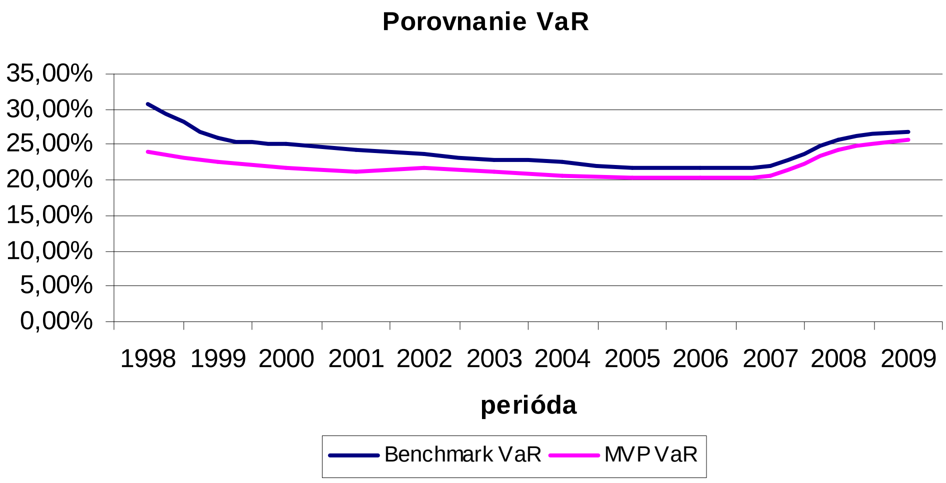
	Ročné výnosy/straty v %										
	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Benchmark	**23,7**	-19,4	**2,4**	-14,3	**66,2**	27,5	**30,7**	**21,7**	**31,2**	-48,2	**53,6**
Max CVaR	18,1	-20,5	-14,3	**4,4**	54,8	**47,9**	25,3	18,7	30,0	-46,4	31,5
Max VaR	19,6	-20,0	-12,8	0,4	55,5	43,9	25,8	18,4	28,4	-47,1	38,0
Max SD	17,2	-19,8	-12,1	0,5	54,6	43,1	25,5	18,5	28,6	-46,4	33,5
MVP CVaR	10,8	-13,5	-1,9	-14,5	54,2	31,8	21,0	17,7	22,0	-44,9	32,9
MVP VaR	11,5	**-13,0**	-2,5	-15,7	55,9	31,6	22,3	17,9	22,9	-45,8	39,1
MVP SD	12,3	-13,7	-3,9	-17,2	55,9	31,2	22,1	18,0	23,0	-45,1	34,0
Index USA	8,9	-14,1	-12,0	-22,5	29,7	8,1	5,4	12,2	-1,4	**-37,7**	28,3

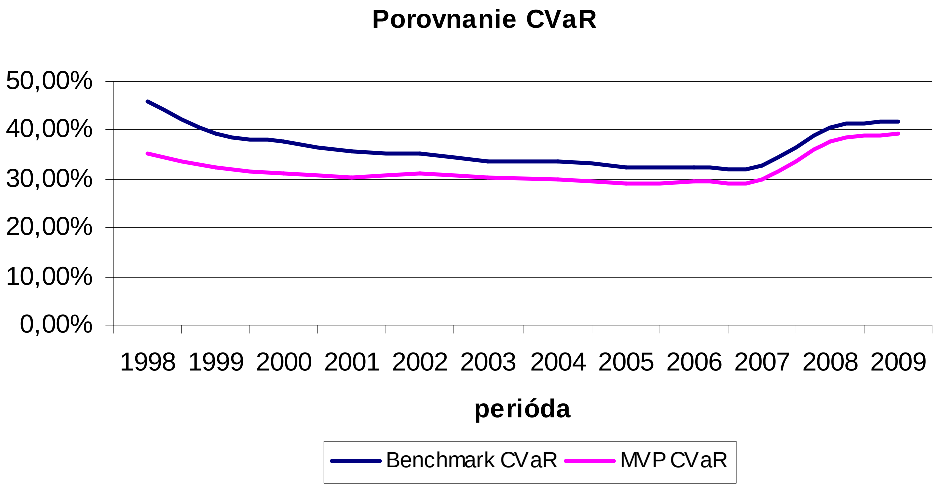
Ako si v tabuľke 1 môžme ďalej všimnúť pri spoľahlivom a rastúcom trende trhu je benchmark dobrým riešením pri investovaní do akcií. Trh má rastúci trend a benchmark tento trend kopíruje. Pri optimalizáciách, ktoré mali maximalizovať zisk sú ich výnosy relatívne blízko výnosom benchmarku. Až na dva roky, tj. 2002 a 2004, je však výnos benchmarku o malú časť väčší. Optimalizácie založené na Markowitzovej teórii portfólia majú vo väčšine periód menšie výnosy ale aj menšie straty ako ostatné optimalizácie. Menšie straty týchto portfólií pozorujeme v rokoch 2000 a 2008 kedy sa akciovému trhu veľmi nedarí. Pre lepšiu predstavu vývoja ročných výnosov uvádzame nasledujúci graf. Graf ukazuje, že všetky naše použité optimalizácie majú veľmi podobný trend. Najväčšie vychýlenie je pozorovateľné u amerického indexu.



Avšak samotný výnos nehovorí nič o tom aké podstupuje investor riziko pri svojom spôsobe investovania. Aj v našom prípade však platí poučka vyšší výnos rovná sa vyššie riziko. Preto môžeme vypozorovať, že pri recesii trhov strácajú benchmark a portfóliá maximalizujúce výnos najväčšiu časť zo svojho množstva investovaného do akciových trhov. Nasledujúce tri grafy porovnávajú veľkosť rizika medzi benchmarkom a jednotlivým optimalizáciami MVP. Porovnanie medzi benchmarkom a maximalizáciami neuvádzame, pretože hodnoty rizík sú veľmi podobné vo viacerých periódach zhodné.







Vidíme, že ročné riziko benchmarku a teda aj max SD, max VaR a Max CVaR je pre všetky použité miery rizika väčšie ako ročné riziko pre portfólia, kotré minimalizujú riziko. Tiež pozorujeme, že optimalizácie mvp SD a mvp CVaR strácajú pri diverzifikovanom portfóliu v čase krízy “najmenej”. Rozdiel v strate však nie je oproti benchmarku taký badateľný, ako by investor, ktorý sa snaží diverzifikovať svoje portfólio očakával. Môžme si všimnúť, že americiký index stratil počas krízy najmenej avšak toto “portfólio” vôbec nediverzifikuje riziko. V prípade rozloženia svojho majetku iba do akciového portfólia sa vzhľadom na veľkosť výnosu a malému rozdielu medzi podstúpeným rizikom benchmarku a MVP portfólií oplatí v dlhodobom horizonte investovanať rovnomerne do všetkých akcií, ktoré plánujeme vo svojom portfóliu vlastniť. Ďalšie optimalizáceie už neprinášajú výrazné zlepšenie výnosnosti porftólia.

Avšak žiadna z použitých optimalizácií nepriniesla výsledok, ktorý by zaručoval stabilnejší výnos pri adekvátnej veľkosti rizika. MVP optimalizácie majú výrazne nižšie výnosy ako ostatné portfólia. Pri porovnaní veľkosti strát však rozdiely medzi optimalizáciami nie sú také badateľné ako by sa pri optimalizáciách minimalizujúcich riziko očakávalo.

Akciové portfólia predstavujú najrizikovejšie formy investovania a preto sú väčšinou vyhľadávané agresívnymi investormi, ktorým podstupovanie veľkého rizika nevadí a nie sú viazaný záväzkami voči svojim klientom.

6.2 Zmiešané portfólio

V tejto časti sa zameriame na konzervatívnejšiu stratégiu investovania. Naše portfólio tentokrát nebude obsahovať len akcie ale aj štátny dlhopis, ktorý výrazne ovplyvní rozloženie investovaného množstva a veľkosť rizika portfólia. Portfólio bude teda zložené z 9 rôznych aktív.

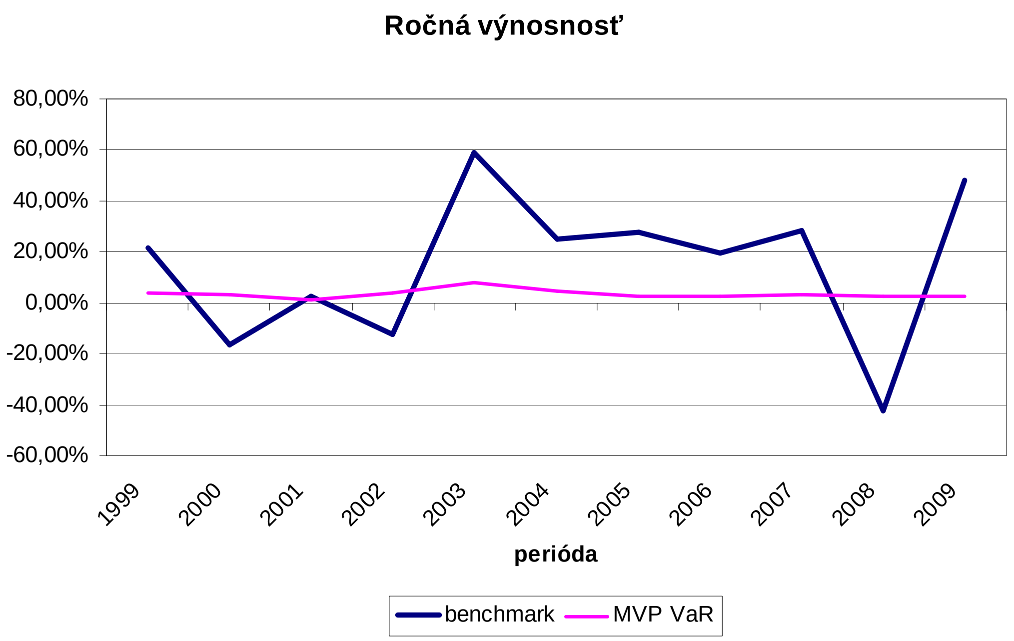
Zloženie portfólia v tomto prípade tvorilo akciové portfólio doplnené bezrizikovým štátnym dlhopisom. Pri hľadaní optimálneho rozloženia portfólia sme v tomto prípade obmenili aj podmienku na výnos. Tentokrát sme nepožadovali aby bol výnos portfólia väčší alebo rovný ako priemerný výnos rovnomerného portfólia ako tomu bolo doteraz. V tomto prípade sme požadovali aby výnos portfólia tvoril 120% výnosu štátneho dlhopisu. Požiadavok na výnos má zaručiť aby portfólio neobsahovalo iba štátny dlhopis ale aj zložku, ktorú predstavujú akcie.

V tabuľke 2 máme zhrnuté ročné výnosy jednotlivých optimalizácií. Môžeme si všimnúť, že správanie benchmarku a maximalizujúcich portfólií je veľmi podobné správaniu akciových portfólií z predchádzajúcej časti kapitoly. Bezrizikový dlhopis v portfóliu znižuje o malú časť výnosy týchto portfólií. Správanie indexu USA sa nemení. Veľmi zaujímavé je však chovanie MVP optimalizácií. Môžeme vidieť, že počas všetkých rokoch testovania sa výnosy týchto portfólií udržali v kladných číslach. Takýto výsledok sme pri čiste akciovom portfóliu nedosiahli. Veľmi pozitívnym výsledkom sú kladné výnosy v časoch finančnej nestability trhov. V roku 2008 je rozdiel medzi výnosom benchmarku a MVP portfóliami najvýraznejší. Benchmark zaznamel stratu vo výške približne 43% pričom MVP portfólia zaznamenali približne 2,5% nárast svojej hodnoty. Ďalšou pozitívnou vlastnosťou, ktorá môže investora zaujímať je stabilná výnosnosť MVP portfólií počas celej periódy testovania. Optimalizácie MVP v zmiešanom portfóliu dosahujú vyššie výnosy za adekvátneho rizika.

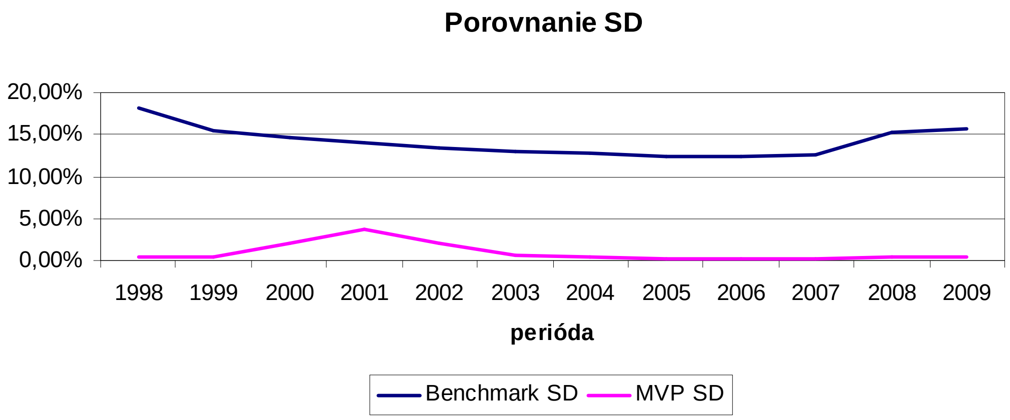
Tabuľka 2

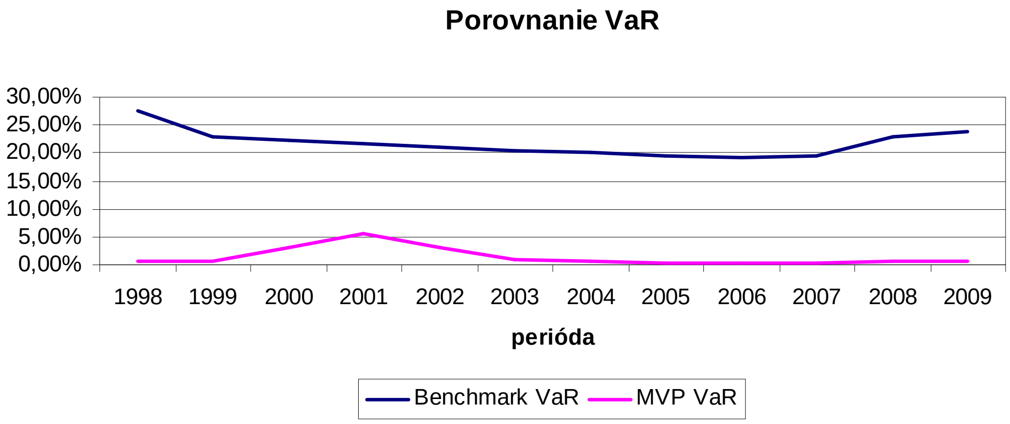
	Ročné výnosy/straty v %										
	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
benchmark	**21,49**	-16,82	2,52	-12,40	**59,20**	24,71	**27,50**	**19,55**	28,08	-42,56	**47,93**
Max CVaR	12,96	-16,11	-14,61	**7,85**	38,28	**42,24**	20,85	12,51	**28,66**	-26,73	10,62
Max VaR	12,54	-15,15	-14,24	6,04	36,72	38,33	20,65	12,26	27,80	-27,37	10,62
Max SD	10,33	-15,00	-13,54	6,68	35,57	38,55	20,45	12,19	27,86	-26,78	10,24
MVP CVaR	3,61	2,87	0,88	4,33	7,66	4,63	2,74	2,82	3,35	2,35	2,43
MVP VaR	3,64	2,88	0,90	3,85	7,81	4,51	2,77	2,82	3,36	2,33	2,44
MVP SD	3,63	2,87	0,88	4,04	7,80	4,54	2,76	2,82	3,35	2,34	2,44
Index USA	8,86	-14,14	-12,04	-22,48	29,67	8,09	5,38	12,20	-1,39	-37,68	28,27
Bond	3,47	**3,43**	**3,32**	3,09	2,80	2,70	2,28	2,62	2,89	2,72	2,22

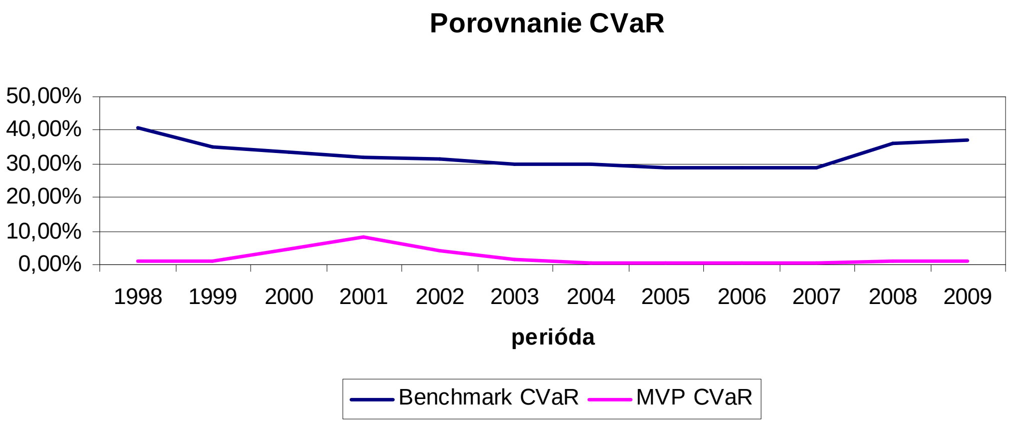
Porvnaním výnosnosti medzi MVP portfóliami zisťujeme, že až v 7 z 11 pozorovaných períód víťazí MVP VaR. V ostatných 4 periódach patrí prvenstvo optimalizácii s mierou rizika - CVaR. Smerodatná odchýlka ako miera rizika nezvíťazila ani v jednej z períód investovania. To môže aj napriek malým rozdielom vo výnosnosti indikovať, že VaR a CVaR dokážu optimálizácie portfólia zpresniť. V nasledujúcom grafe si môžeme všimnúť veľkú volatilitu výnosv benchmarku a stabilný vývoj výnosu MVP VaR.



Medzi veľmi dôležitý ukazovateľ portfólia patrí aj jeho rizikovosť. V nasledujúcich grafoch preto uvádzame porovnanie rizikovosti benchmarku a MVP optimalizácií. Môžme pozorovať, že portfólia založené na MVP optimalizácii majú výrazne nižšie riziko ako benchmark.







Rozdiely medzi zvolenými mierami rizík sú výrazne väčšie ako boli rozdiely u akciového portfólia. Dôvodom je, že optimalizácie MVP majú vo svojom optimálnom portfóliu najviac zastúpený práve bezrizikový štátny dlhopis, ktorý znižuje riziko portfólia. Veľkosť zastúpenia rizikovejších akcií v portfóliu je podmienené požadovanou výškou výnosu. Na záver si v tabuľke 3 [2] ukážeme rozdiely veľkosti rizika medzi jednotlivými optimalizáciami pri akciovom portfóliu a zmiešanom

[2] V tabuľke 3 znamená A akciové portfólio a B portfólio zmiešané

portfóliu. Za zmienku stojí porovnanie veľkosti rizika portfólií MVP pri akciovom a zmiešanom portfóliu.

Tabuľka 3

Ročné riziko v %											
	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Ben SD A	20,36	17,34	16,52	15,77	15,18	14,65	14,31	13,97	13,93	14,05	17,27
BenSD B	18,10	15,41	14,69	14,02	13,49	13,03	12,72	12,42	12,38	12,49	15,36
Ben VaR A	30,87	25,90	25,15	24,20	23,68	22,84	22,47	21,79	21,69	22,00	25,72
Ben VaR B	27,44	23,02	22,35	21,51	21,05	20,31	19,98	19,36	19,28	19,55	22,86
Ben CVaR A	45,79	39,18	37,54	35,74	35,31	33,77	33,52	32,49	32,37	32,67	40,73
Ben CVaR B	40,71	34,83	33,37	31,77	31,39	30,02	29,80	28,88	28,77	29,04	36,20
MVP SD A	16,21	14,80	14,20	13,77	13,87	13,45	13,12	12,94	12,96	13,15	16,25
MVP SD B	0,43	0,47	2,13	3,70	2,06	0,67	0,33	0,25	0,23	0,16	0,42
MVP VaR A	24,07	22,62	21,71	21,30	21,66	21,15	20,63	20,32	20,33	20,70	24,14
MVP VaR B	0,64	0,70	3,08	5,59	3,12	1,04	0,54	0,41	0,38	0,29	0,61
MVP CVaR A	35,11	32,57	31,32	30,37	31,24	30,32	29,88	29,30	29,36	29,90	37,83
MVP CVaR B	0,94	1,00	4,54	8,31	4,30	1,47	0,75	0,58	0,54	0,40	0,92

Z pohľadu minimalizácie rizika a očakávaného stabilného výnosu je podľa našej analýzy najvýhodnejšie a najbezpečnejšie investovanie do zmiešaných portfólií MVP VaR a MVP CVaR. Táto stratégia je vhodná pre investorov, ktorý musia spĺňať záväzky určitého výnosu voči svojim klientom. Základ ich portfólia je preto tvorený bezrizikovým štátnym dlhopisom. Pridaním akcií do portfólia zvyšime jeho výnosnosť ako aj rizikovosť. Zvýšenie výnosnosti portfólia je dôležité pre investorov, ktorým výnosnosť štátneho dlhopisu nepostačuje a hľadajú vyšší výnos.

7 Záver

V tejto práci sme sa zaoberali hľadaním optimálneho rozloženia portfólia na základe rôznych mier rizika. Medzi nami zvolené miery rizika patrili smerodatná odchýlka, Value at Risk a Conditional Value at Risk. Zaoberali sme sa dvomi rôznymi prípadmi zloženia portfólia. V jednom z nich sme študovali správanie čisto akciového portfólia. V druhom prípade sa jednalo o zmiešané portfólio, ktoré obsahovalo bezrizikový štátny dlhopis. Výsledky jednotlivých optimalizácií sme skúmali z hľadiska veľkosti výnosu a veľkosti podstúpeného rizika.

Výsledky akciového portfólia potvrdili hľadisko dlhodobej výnosnoti akcií ale aj hľadisko ich vysokej rizikovosti. Na základe našej analýzy však ani jedna z testovaných optimalizácií nepriniesla požadovaný výsledok. Vo väčšine periód porazil optimalizácie dosť výrazne benchmark. Optimalizácie znižujúce riziko snižovali až príliš výnosy portfólií a pri nepriaznivom vývoji na trhoch boli ich straty veľmi podobné stratám benchmarku a optimalizáciám, ktoré sa snažili maximalizovať výnos.

Podstane iné výsledky prinieslo zmiešané portfólio. Z analýzy je zrejmé, že prítomnosť bezrizikového štátneho dlhopisu v portfóliu umožňuje znížiť riziko portfólia a stabilizovať jeho výnos. V prípade tohto portfólia môžeme konštatovať úspešnosť portfólií, ktoré minimalizujú riziko. Počas celého sledovaného obdobia dosahovali MVP optimalizácie kladné výnosy, čo je najmä v čase hospodárksej krízy veľmi pozitívny výsledok. Zo samotného porovnania výnosov MVP optimalizácií je na tom najlepšie MVP VaR druhé miesto patrí MVP CVaR a poslednou je MVP SD. Rozdiely medzi jednotlivými MVP optimalizáciami sú však minimálne a preto záleží na rozhodnutí každého investora zvlášť. Jednou z výhod použitia VaR alebo CVaR ako miery rizika oproti SD je skutočnosť, že dokážu lepšie kvantifikovať veľkosť podstúpeného rizika.

Literatúra

[1] Dupačová J., Hurt J., Štěpán, J.: *Stochastic modeling in economics and finance.* Kluwer Academic Publishers, Praha, 2003.

[2] Bugár, G., Uzsoki, M.: *A longitudinal study on Portfolio Optimization: Is the "Success" Time Dependent?,* 2009.

[3] Anděl, J. : *Statistické metody.* Matfyzpress, Praha, 1998.

[4] Cipra, T : *Kapitálová přiměřenost ve financích a solventnost v pojišťovnictví.* Ekopress, Praha, 2002.

[5] Kulich, M: *Prednáška - Statistika.* MFF UK, Praha, 2010/2011

[6] Arztner, F., Delbaen, F., Eber, J.M., Heath, D.: *Coherent measures of risk.* Mathematical Finance 9 (3), 203-228. 1998.

[7] Rockafellar R.T. and Uryasev S.: *Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions. Journal of Banking and Finance 26 (7), 1443-1471.* 2002.

[8] Wolfram Mathematica 7: *Documentation Centre.*

Prílohy

Na priloženom CD sa nachádzajú nasledujúce údaje

- Bakalárska práca v pdf formáte
- Zdrojový kód programu Mathematica
- Použité dáta indexov
- Súbor obsahujúci výsledky